EXERCICE N°1 :	20'	4 points	

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=2+\cos(2x)$

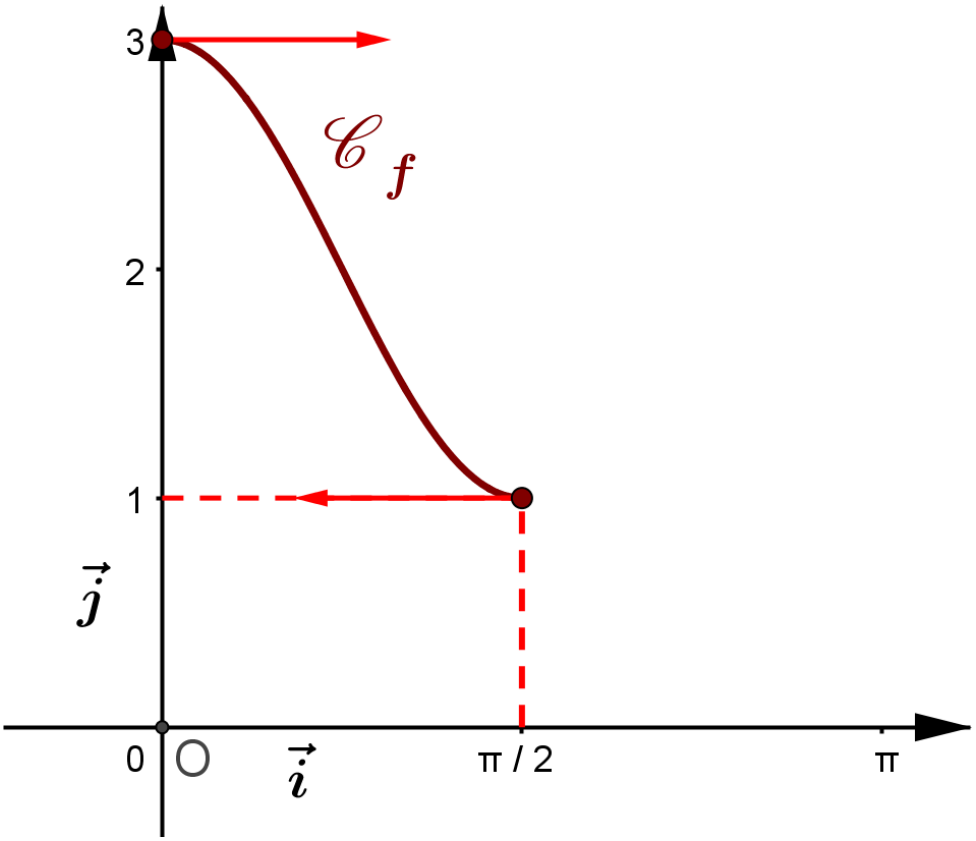
1°) a) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrer que f est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Le graphique ci-dessous est la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

Tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ de la fonction f^{-1}.



2°) a) Calculer $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{5}{2}\right)$.

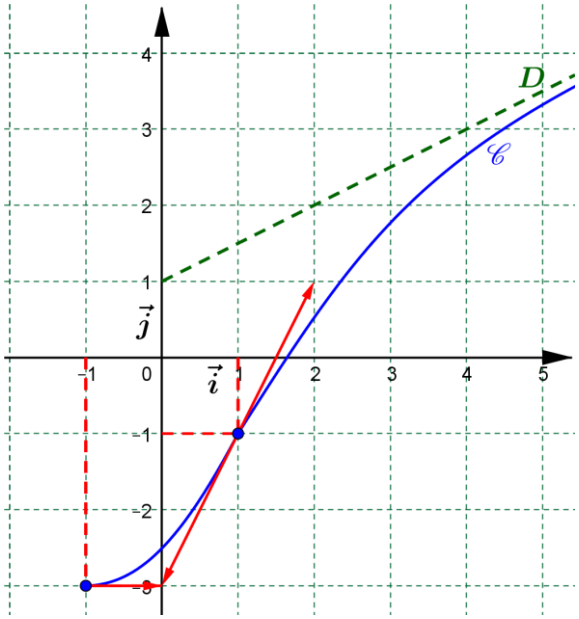
b) f^{-1} est-elle dérivable à droite en 1 ? justifier.

3°) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1,3[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

EXERCICE N°2 : 20' 4 points

La courbe $\mathscr{C}$ de ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f continue et dérivable sur $[-1,+\infty[$.

La droite D étant son asymptote au voisinage de $(-\infty)$.



À partir du graphique et des renseignements fournis ;

1°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $f(1)$ et $f'(1)$.

2°) Justifier que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

3°) On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

a) Montrer que f^{-1} est dérivable en(-1),puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'(-1)$.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en –3.

c) Tracer dans le même repère la courbe de f^{-1}.

EXERCICE N°3 : 30' 6 points

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2°) Dresser le tableau de variation de f et en déduire que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]0,1]$.

3°) On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

On désigne par $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Tracer les courbes $\mathscr{C}$ de f et $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in]0,1]$.

5°) Pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose : $g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)+\tan x$.

a) Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(x)=\dfrac{1}{\cos x}$.

b) Montrer que g est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

c) En déduire que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

d) On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

Montrer que g^{-1} est dérivable en 2 et calculer $\left(g^{-1}\right)'(2)$.